Л И С Т О К   1 9 .

ЭТОТ ЛИСТОК НАДО ПРОЧИТАТЬ ВСЕМ;НЕ ТОЛЬКО ТЕМ,КТО ЧТО-
-ТО НЕ РЕШИЛ,НО И ТЕМ,КТО РЕШИЛ ВСЕ:БЫТЬ МОЖЕТ ОНИ УВИДЯТ БО-
ЛЕЕ ПРОСТЫЕ ИЛИ КРАСИВЫЕ РЕШЕНИЯ.

Б СВЯЗИ С ОТСУТСТВИЕМ СИМВОЛОВ НА АЦПУ ВВЕДЕНЫ СЛЕДУЮЩИЕ
ОБОЗНАЧЕНИЯ:

[G] - "ПОРЯДОК ГРУППЫ"

3 - "СУЩЕСТВУЕТ"

*#*N1 \#***

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕЧАНИЯ:

1. ГРУПП ПОРЯДКА 4 ДВЕ: Z2*Z2 И Z4, ОБЕ АБЕЛЕВЫ. ЕСЛИ ФАКТОР-
ГРУППА ИЛИ ПРОСТО ГРУППА ИМЕЕТ ПОРЯДОК 4, ОНА АБЕЛЕВА!

2. ГРУПП ПОРЯДКА 6 ДВЕ: Z2*Z3 И D3. ЕСЛИ [G]=G И G ≠ Z6,ТО ОНА
НЕАБЕЛЕВА!

3. AH=BH <=> A'B e H (H-ПОДГРУППА G,НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО H Δ G).

РЕШЕНИЕ: AH=BH <=> ∀ X%H 3Y e H AX=BY <=> A'B=XY' X e H,Y e H
=> (Y' e H,X e H)=> XY' e H.

*#*N2 \#***

ОПЕЧАТКА В ОПРЕДЕЛЕНИИ ГОМОМОРФИЗМА: МЫ РАССМАТРИВА-
ЕМ ТОЛЬКО ГОМОМОРФИЗМЫ "НА".

*#*N3 \#***

(A,B) KERF Δ G

1. {X,Y} C KERF <=DEF=> F(X)=F(Y)=Э => F(XY)=F(X)F(Y)=Э <=>
<=> XY e KERF.

2. F(E)=Э

3. X e KERF <=> F(X)=Э.   F(X')=F(X)'=Э'=Э <=> X' e KERF

4. X e KERF GeG F(GXG')=F(G)F(X)F(G')=F(G)ЭF(G')=F(GG')=Э <=>
GXG' e KERF

(C) {R,S} C KERF <=> F(R)=F(S)

1. {R,S} C KERF <=> 3{X,Y} C KERF R=GX,S=GY
F(R)=F(GX)=F(G)F(X)=F(G)Э=F(G)=F(GY)=F(S)

2. F(R)=F(S) => 3 GeG {R,S} C GKERF ReGKERF => RKERF = GKERF
ДОКАЖЕМ, ЧТО   SKERF = RKERF <=> S'R e KERF
F(S'R)=F(S')F(R)=F(S)'F(R)=F(S)'F(S)=Э <=> S'R e KERF

(D,E) 1. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБРАЗА: GKERF=QKERF =>
{G,Q} C GKERF => F(G)=F(Q) => Φ(GKERF)=Φ(QKERF)

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРООБРАЗА: Φ(GKERF)=Φ(QKERF) <=> F(Q)=F(G)
=> GKERF=QKERF

(F) Φ(GKERF*QKERF)=Φ(GQKERF)=F(GQ)=F(G)F(Q)=
=Φ(GKERF)Φ(QKERF).

*#*N6 \#***

(A) R - АБЕЛЕВА.

(B) ПОСТРОИМ ГОМОМОРФИЗМ F(RØ")=RØ"KERF: "=K360"/N+X
K e Z

ДОКАЖЕМ,ЧТО F - ГОМОМОРФИЗМ

1. F(RØ@RØ&)=F(RØ@+&)=RØ(X+Y)KERF=F(RØ@)F(RØ&)
@=K1*360"/N+X,   &=K2*360"/N+Y
@+&=(K1+K2)*360"/N+(X+Y)

2. RØ@ e KERF <=> @=K360"/N (ЗНАЧИТ RN Δ R)

RØY KERF

ПУСТЬ RØ&   ТОГДА &=X+360"K1/N=Y+360"K2/N =>

RØX KERF   [X-Y]=360"[K1-K2]/N => [X-Y] e KERF =>
RØX KERF=RØY KERF

ЗНАЧИТ F - ОТОБРАЖЕНИЕ (F(RØ&)-ЕДИНСТВ.)

∀ X RØX=RØX KERF => F - ОТОБРАЖЕНИЕ "НА" => F - ГОМОМОРФИЗМ.

ПОСТРОИМ ИЗОМОРФИЗМ F(RØ@KERF)=RØN@

1. F - ОТОБРАЖЕНИЕ RØ@KERF=RØ&KERF => @-&=360'K/N => N@=N&+
+360"K,Т.Е. RØN@=RØN&

2. F - ВЗ.-ОДНОЗНАЧН. RØN@=RØN& => N@=N&+360"K => RØ@KERF=
=RØ&KERF

3. F - ИЗОМОРФИЗМ F(RØ@KERF*RØ&KERF)=F(RØ@+&KERF)RØN(@+&)=
=RØN@RØN&=F(RØ@KERF)F(RØ&KERF).

*#*N7 \#***

H1 Δ G1 H2 Δ G2 => (G1*G2)/(H1*H2)=G1/H1*G2/H2

ИЗОМОРФИЗМ F: F(XH1,YH2)=(X;Y)(H1;H2)

ОДНОЗНАЧНОСТЬ ЯСНА: (XH1,YH2)(AH1,BH2)=(XAH1,YBH2)

(X,Y)(H1,H2)(A,B)(H1,H1)=(XA,YB)(H1,H2)

(A) G1=G2 H1=H2 G1/H1=G2/H2
Z2*Z2≠Z4 Z2≠Z2 Z2*Z2/Z2=Z2=Z4/Z2
(B) G1=G2 H1≠H2 G1/H1=G2/H2
D4=D4 Z2*Z2≠Z4 ({(13),(24),E,(1324)}=Z2*Z2)
D4/Z4=Z2=D4/Z2*Z2
(C) G1=G2 H1=H2 G1/H1≠G2/H2
Z4*Z2=Z4*Z2 E*Z2=Z2*E Z4*Z2/Z2*E=Z4/Z2*Z2*E=Z2*Z2
Z4*Z2/E*Z2=Z4/E*Z2/Z2=Z4 Z4≠Z2*Z2
***N9 **
УСЛОВИЕ НЕ ВЕРНО F(F'(M))=M
ВСЕГДА ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ "НА"
(СМ.2.) ХВАЛА ЗАМЕТИВШИМ И ДО-
КАЗАВШИМ!
***N12**
(A) Ц(g) - ПОДГРУППА G
1.A ∈ Ц(g), B ∈ Ц(g) ABgB'A'=AgA'=g
2.EgE'=g
3. XgX'=g => g=X'gX
(B) [G]/[Ц(g)] - КОЛИЧЕСТВО ЭЛЕМЕНТОВ,СОПРЯЖЕННЫХ С g
ПОСТРОИМ ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ ИЗ КСЭ И СМЕЖНЫХ
КЛАССОВ XЦ(g)
ПУСТЬ КСЭ=[g0,g1,g2...gK] И XgX'=gI (0=<I=<K,g0=g)
ТОГДА XЦ(g) -F-≥ GI
ДОКАЖЕМ,ЧТО F - ОТОБРАЖЕНИЕ.(ПОНЯТНО,ЧТО [XЦ(g)=YЦ(g)]<=>
Y ∈ XЦ(g),НАМ НАО ДОКАЗАТЬ,ЧТО ЕСЛИ XЦ(g)=YЦ(g),ТО XgX'=YgY')
YЦ(g)=XЦ(g)<=>Y ∈ XЦ(g)<=>ЗA Y=XA AgA'=g YgY'=XAgA'X'=
=X(AgA')X'=XgX'. ЗНАЧИТ КАЖДОМУ КЛАССУ СООТВЕТСТВУЕТ ОДНО gI.
ЕСЛИ gI ∈ КСЭ => ЗX ∈ G XgX'=gI ЗНАЧИТ F - ОТОБРАЖЕНИЕ "НА".
ДОКАЖЕМ,ЧТО ПРООБРАЗ РОВНО ОДИН. ПУСТЬ F(XЦ(g))=F(YЦ(g)),
НАДО ДОКАЗАТЬ,ЧТО XЦ(g)=YЦ(g),Т.Е.Y ∈ XЦ(g),Т.Е. ЗA Y=XA AgA'=
=g Т.Е. (X'Y)g(X'Y)'=g
ИЗ ТОГО,ЧТО F(XЦ(g))=F(YЦ(g)) ИМЕЕМ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ F
XgX'=YgY' => g=X'YgY'X=(X'Y)g(X'Y)',ЗНАЧИТ X'Y ∈ Ц(g) =>
Y ∈ XЦ(g) => YЦ(g)=XЦ(g).
***N14**
(A) ЕСЛИ X НЕ ИМЕЕТ СОПРЯЖЕННЫХ,ТО ∀ g ∈ G gXg'=g =>
gX=Xg
ЕСЛИ ∀X: X ИМЕЕТ СОПРЯЖЕННЫЕ A ∈ ЦX,Т.Е. AXA'=X => AX=XA,ТО
∀X ∈ G AX=XA => A ∈ Ц(g) ЕСЛИ A ∈ Ц(g),ТО ∀X A ∈ ЦX,Т.К.AXA'=X
(B) Ц(G)∆G
1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛЮБОГО ЧИСЛА ПОДГРУПП - ПОДГРУППА.
2. X ∈ Ц(G) AXA'=A(XA')=A(A'X)=X => Ц(G)∆G
(C) КСЭX={X}<=>X ∈ Ц(G)
КСЭX={X} <=> ∀G ∈ G GXG'=X <=> GX=XG
***N15**
(A) ДА Ц(D4)={E,Z0}=Z2. В ФАКТОРГРУППЕ 4 ЭЛЕМЕТА,
ЗАЧИТ ОА АБЕЛЕВА. (D4/{E,Z0}=Z2*Z2)
(B) НЕТ,ПУСТЬ G/Ц(G)=ZN, ТОГДА ЗA [AH]=N (AH)**K=A**KH
G/Ц(G)={EH,AH,A**2H...A**(N-1)H} => ∀g ∈ G ЗX ∈ Ц(G) g=A**KX
ПУСТЬ g1=A**KX, g2=A**MY g1g2=(A**KX)(A**MY)=
A**K(XA**M)Y=A**K(A**MX)Y=A**(K+M)XY=A**(K+M)YX=...=g2g1
Т.Е. G - АБЕЛЕВА. Ц(G)=G G/Ц(G)=E
???
***N16**
(A) G'∆G
G' - ПОДГРУППА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ. A(X1Y1X1'Y1')(X2Y2X2'Y2')...
...(XNYNXN'YN')A'=(A(X1Y1X1'Y1')A')(A(X2Y2X2'Y2')A')...(A(XN
YNXN'YN')A')=XAX1!')(1Y1A')(A1'A')(A 1'A)...=(AX1A')(AY1A')*
*(AX1A')'(AY1A')'... , Т.Е. ЛЮБОЙ ЭЛЕМЕНТ,ПОРОЖДЕННЫЙ КОММMУ-
ТАТОРАМИ (XY YIXI'@YI' ПЕБЕХОТИТ ЭЛМЕНТ,ТОЖЕ ПОРОЖДЕННЫЙ
КАКИМИ-ТО КОММУТАТОРАМИ. AG'A'=G'
(B) G/G' - АБЕЛЕВА. ДОКАЖ%М,ЧО BG'П BG'=0
//
E ∈ G' => AB ∈ ABG' A'B'AB ∈ G' => BA(A'B')AB=AB ∈ BAG'
AB ∈ ABG' П BAG' => ABG'=BAG'!
***N17**
H ∆ G AND G/H - АБЕЛЕВА <=> G' C H AND H ∆ G
G/H - АБЕЛЕВА <=> ∀{A,B} C G ABH=BAH <=> A'B'AB ∈ H <=> G' C H

```
   ПО ИНДУКЦИИ.
**#*H21#**********************************************************
  H ▲ G AND (H И G/H - РАЗРЕШИМЫ) => G - РАЗРЕШИМА
ПОСТРОИМ ГОМОМОРФИЗМ F(G)=G/H
F(ABA'B')=F(A)F(B)F(A)'F(B)' => F(G')=G/H'
ПО ИНДУКЦИИ F(G'(K))=G/H'(K)
G/H - РАЗРЕШИМА => ∃ N G/H'(N)={E}   F(G'(N))={E}
G'(N) C KERF <=> G'(N) C H
∀ I {AI,BI} C H =>(A1B1A1'B1')**K1(A2B2A2'B2')**K2 C H'
   T.E. G'(N+1) C H'
 ПО ИНДУКЦИИ G'(N+K) C H'(K)
H - РАЗРЕШИМА => ∃ M : H'(M)={E} => G'(N+M) C {E} =>
G'(N+M)={E} => G - РАЗРЕШИМА.
**#*N22#**********************************************************
       (A)   [G]=P**K/Ц(G)=E
ИЗ N14  X ∈ Ц(G) <=> КСЭX ={X}
ОБОЗНАЧИМ КОЛИЧЕСТВО ЭЛЕМЕНТОВ В КСЭ Φ(X),ТОГДА ИЗ N12(B)
[G]/[Ц(G)]=Φ(G) => [G] : Φ(G)   [G]=P**K   Φ(G)=P**@ (@∈N OR @=Ø)
 Ц(G)={E} => ∀G≠E Φ(G)≠1 @≠Ø
G=КСЭG1 U КСЭG2...U КСЭGN; ГДЕ ∀{I,J} C {1,2...N} КСЭGI=КСЭGJ
  ТОГДА  [G]=Φ(G1)+Φ(G2)+...+Φ(GN)
 P**K=P**@1+P**@2+...+P**@K+1
 1 : P(N) => Ц(G)≠{E}
       (B)  ИНДУКЦИЯ.  БАЗА:[G]=P => G'={E}
ШАГ:  ПУСТЬ ДЛЯ 1,2,...K [G]=P**M => G - РАЗРЕШ. Ø<M<K
 [G]=P**(K+1)  A) [Ц(G)]=P**(K+1) => G'={E}
B)  [Ц(G)]≠P**(K+1) ИЗ (A) [Ц(G)]≠1 =>
[Ц(G)]=P**@  Ø<@<K+1 => G - РАЗРЕШ.
[G/Ц(G)]=P**(K+1-@)≠P**(K+1) => G/Ц(G) - РАЗРЕШ. => G -
РАЗРЕШИМА.
**#*N23#**********************************************************
[G]=P**2 => G - АБЕЛЕВА
   Ц(G)≠{E} (N22A) => Ц(G)=G OR [Ц(G)]=P
ЕСЛИ Ц(G)=G => G - АБЕЛЕВА
ЕСЛИ [Ц(G)]=P => G/Ц(G)=ZP - ПРОТИВОРЕЧИЕ С N15B.
  ЕЩЕ 2 СПОСОБА РЕШЕНИЯ В ПЕЧАТИ НЕ ПУБЛИКУЮТСЯ,НО ПРЕДО-
 СТАВЛЯЮТСЯ ВСЕМ ЖЕЛАЮЩИМ.
```